

## 6. I problemi verbali e il valore predittivo delle prove INVALSI

di Roberto Capone, Alice Lemmo, Federica Filiberti

La competenza matematica viene definita come l'abilità di sviluppare e applicare il pensiero matematico per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane. In questo capitolo presenteremo una ricerca focalizzata sulle difficoltà linguistiche che gli studenti incontrano nella risoluzione dei quesiti INVALSI della dimensione risolvere problemi, su quali difficoltà emergono nella scuola primaria e su come queste si sviluppano o si modificano nel passaggio dalla classe seconda alla classe quinta. L'analisi di catene di quesiti somministrati in livelli successivi alla stessa coorte di studenti ci ha permesso di individuare specifiche difficoltà, le loro origini didattiche ed epistemologiche e di identificare precocemente gli studenti in difficoltà analizzando i risultati delle prove. L'analisi che presenteremo cerca di ricondurre le difficoltà riscontrate nel grado 5 ai comportamenti degli studenti nel grado 2. Partendo dai dati delle prove INVALSI di quinta primaria, abbiamo svolto un'analisi a ritroso sulla prova di seconda per identificare delle catene di quesiti. L'analisi ha mostrato la presenza di molte difficoltà comuni e quindi ha confermato che un lavoro precoce sui risultati delle prove di seconda può essere utile per evitare possibili futuri errori nelle prove successive. Dagli esiti si evince che gli interventi didattici hanno prodotto cambiamenti positivi nella classe sperimentale, rispetto a quella di controllo.

*Mathematical competence is defined as the ability to develop and apply mathematical thinking to solve a range of problems in everyday situations. In this chapter we present a research centered on the linguistic difficulties that students experience in solving INVALSI test. We focus on the item of the dimension solving problems and we investigate on what difficulties emerge in primary school and how these develop or change in the passage from grade 2 to grade 5. The analysis of the results of the chains of questions*

*allows us to identify specific difficulties, their didactic and epistemological origins and to identify students' difficulty at an early stage. The analysis aims to investigate the difficulties that emerge in the different school grades and, in particular, it focusses on linking the difficulties encountered in grade 5 students to those in grade 2. This analysis is based on the hypothesis that some strategies employed in previous grades are predictive of future solution strategies, which will lead students to errors in future questions. Starting from the data collected in grade 5 INVALSI tests, we carried out a backward analysis of the grade 2 test in order to identify chains of questions. The analysis shows the presence of many common difficulties in the two grades and therefore it confirms that an early work on the results of grade 2 tests can be useful to prevent possible future errors in subsequent tests. The results show that the specific educational activities have produced positive changes in the experimental class, compared to the control class.*

## **1. Introduzione**

La competenza matematica costituisce una delle otto competenze-chiave proposte dalle Raccomandazioni del Parlamento Europeo e del Consiglio del 18 dicembre 2006 (2006/962/CE). In particolare, tale competenza viene definita come l'abilità di sviluppare e applicare il pensiero matematico per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane (MIUR, 2012, p. 12). Proprio per questo motivo, il processo di risoluzione di problemi è uno degli elementi chiave nella progettazione di attività di insegnamento/apprendimento della Matematica in tutti i Paesi (Ball e Bass, 2003; Kilpatrick, Swafford e Findell, 2001). Secondo Schoenfeld (1985), risolvere problemi significa trovare una strada per uscire da una difficoltà o per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile. In linea con questo pensiero, il problem solving è una delle attività in cui studenti e docenti incontrano maggiori difficoltà.

Nella pratica didattica, i problemi di Matematica sono generalmente presentati attraverso un testo scritto arricchito da altre forme di rappresentazione (per esempio, grafici, tabelle, immagini, ...); per questo motivo, molto spesso in letteratura vengono chiamati problemi verbali (Verschaffel, Greer e De Corte, 2000) o problemi a righe (Zan, 2016).

In questo contributo, presenteremo una ricerca focalizzata sulle difficoltà linguistiche che gli studenti incontrano nella risoluzione dei problemi verbali. In particolare, la nostra attenzione verterà su quali difficoltà emergono nella scuola primaria e come queste si sviluppano o si modificano nel passag-

gio dalla classe seconda alla classe quinta. Tali difficoltà sono state raccolte ed esaminate a partire dai risultati emersi dalle analisi dal Servizio Nazionale di Valutazione. Il nostro obiettivo è quello di proporre un'analisi integrata, qualitativa e quantitativa, che possa fornire materiale per una riflessione sulle prove di valutazione standardizzata nazionale in riferimento ai problemi verbali.

## **2. La ricerca in didattica della Matematica sui problemi verbali**

Da diversi anni, un importante ramo della ricerca in didattica della Matematica nazionale e internazionale si focalizza sullo studio delle difficoltà legate al processo di risoluzione di problemi; in particolare, l'attenzione si rivolge sui fattori che possono maggiormente influenzare gli studenti nella scelta di implementare o meno le strategie risolutive.

Molte ricerche mostrano che la maggior parte delle difficoltà che gli studenti incontrano riguardano da una parte l'implementazione di un algoritmo risolutivo (si veda per esempio Jupri e Drijver, 2016; Wijaya *et al.*, 2014; English e Watters, 2004) e dall'altra la comprensione del testo (si veda per esempio Mayer, 1982; De Corte e Verschaffel, 1985; Vilenius-Tuohimaa, Aunola e Nurmi, 2008).

In riferimento a questo secondo aspetto, molte ricerche mostrano che il testo ha una forte influenza sull'interpretazione del solutore e quindi sui processi risolutivi che mette in campo (Kintsch e Greeno, 1985). Diverse ricerche internazionali, per esempio quella presentata da Neshet (1982), mostrano che in molti casi gli studenti provano a inferire direttamente dal testo i passaggi risolutivi per determinare la soluzione del problema piuttosto che rappresentare la situazione descritta nel testo. Dagli anni Ottanta, sono state realizzate migliaia di ricerche in questo campo, quelle presentate in precedenza rappresentano solo un piccolo esempio. Daroczy e colleghi (2015) hanno proposto un'ampia review della letteratura sul tema e hanno evidenziato che sono tre le principali componenti che possono provocare delle difficoltà nel processo risolutivo dei problemi verbali:

- la complessità linguistica del testo del problema;
- la complessità numerica dei dati presentati nel problema;
- la relazione tra la componente linguistica e quella numerica del problema.

Infatti, leggere e interpretare un testo matematico non significa solo decodificare la consegna, ma implica anche la capacità di ricavare dal contesto descritto le informazioni con le quali poi lavorare. A riguardo Zan (2012) parte dall'assunto che vi è uno stretto legame tra “contesto” e “domanda” cui

segue la focalizzazione della situazione problematica: più le due componenti sono tra loro collegate, maggiore sarà la comprensione. Inoltre, lo studente si ritrova ad affrontare un problema “eteroposto”, ossia formulato da un individuo diverso da lui, oltre a doverne decifrare la formulazione scritta (*ibid.*). L’interpretazione delle richieste implica necessariamente le seguenti tre componenti (Gerofsky, 1996):

- la corretta contestualizzazione del problema, con tutte le sue implicazioni;
- l’individuazione di tutte le informazioni necessarie per la risoluzione;
- la messa in atto dei processi risolutivi e delle operazioni matematiche conseguenti.

Il punto di partenza del nostro lavoro è che, se le difficoltà relative a queste tre componenti vengono individuate precocemente, possono essere messe in atto strategie didattiche finalizzate alla corretta costruzione del sapere matematico.

### 3. I quesiti INVALSI e le catene di quesiti

I quesiti somministrati nelle rilevazioni cartacee del Servizio Nazionale di Valutazione e che vengono qui presentati sono strettamente collegati con le Indicazioni nazionali secondo un fissato Quadro di riferimento (SNV, 2018). I quesiti delle prove sono di diverse categorie (scelta multipla semplice, scelta multipla complessa, risposta univoca, risposta aperta articolata, cloze), appartenenti alle tre dimensioni (Conoscere, Risolvere problemi, Argomentare). Ogni quesito viene inoltre presentato con una classificazione relativa alle sue caratteristiche (Ambito, Scopo della domanda, Traguardi per lo sviluppo delle competenze, Obiettivi di apprendimento delle Indicazioni nazionali e Linee guida).

I risultati delle indagini INVALSI, sono analizzati facendo uso del modello di Rasch (1960). Si tratta di un modello logistico a un parametro che appartiene alla categoria dell’*Item Response Theory* (IRT) e opera una stima congiunta di due tipologie di parametri: un parametro di difficoltà per ogni domanda del test e un parametro d’abilità per ogni studente. In particolare, il modello di Rasch consente di esprimere la probabilità di scegliere la risposta corretta in un quesito in funzione della difficoltà del quesito stesso e dell’abilità dello studente misurata sull’intera prova. La relazione tra l’abilità degli studenti sull’intero test e la probabilità di rispondere correttamente a un quesito è rappresentata da una curva chiamata curva caratteristica dell’item. In modo analogo è possibile rappresentare i dati empirici e, in particolare, l’andamento di ciascuna risposta (in caso di quesiti a scelta multipla delle

opzioni di risposta) in funzione dell'abilità degli studenti. Questi specifici grafici, chiamati distractor plot (DP), consentono di analizzare come gli studenti hanno risposto a una domanda in base al loro livello di abilità ottenuto sull'intero test, tenendo conto anche dell'andamento delle risposte sbagliate. I DP sono utili in fase di analisi dei dati raccolti dal Servizio Nazionale di Valutazione: le percentuali indicano solo la quantità di studenti che hanno dato una certa risposta ma non la loro abilità. Questi grafici, invece, mostrano la correlazione tra la percentuale di scelta di una certa risposta e l'abilità dello studente nella prova.

L'analisi delle prove INVALSI oggetto di questo studio è stata fatta individuando delle *catene di quesiti* (Bolondi *et al.*, 2016). Si tratta di quesiti somministrati in livelli successivi alla stessa coorte di studenti e relativi a un particolare contenuto di apprendimento e quindi riferite alla stessa dimensione e ambito della Matematica. Come mostrato da Bolondi e colleghi (*ibid.*), l'analisi dei risultati delle catene di quesiti permette da un lato di individuare specifiche difficoltà e le loro origini didattiche ed epistemologiche e dall'altro di identificare precocemente gli studenti in difficoltà. Lo studio che presenteremo mira a indagare le difficoltà che emergono nei diversi livelli e, in particolare, a cercare di ricondurre le difficoltà riscontrate nel grado 5 ai comportamenti degli studenti nel grado 2. Alla base di questo lavoro di analisi c'è l'ipotesi che, scelti opportunamente i quesiti, alcune strategie manifestate nei livelli precedenti, che hanno condotto lo studente a scegliere opzioni di risposta errate, siano predittive di future strategie risolutive che condurranno quindi all'errore in prove successive.

In questa prospettiva, ci aspettiamo che l'analisi di particolari quesiti relativi alla dimensione risolvere problemi, può permettere di evidenziare determinate difficoltà in un certo livello scolastico per indagare se queste possano essere previste dai risultati delle prove precedenti. In particolare, abbiamo scelto di analizzare i quesiti della dimensione risolvere problemi delle prove INVALSI di seconda primaria dell'anno scolastico 2008/2009 e quelle di quinta primaria dell'anno 2011/2012. Dopo un'accurata analisi statistica e un'analisi a priori delle domande, basata su teorie e risultati della ricerca in didattica della Matematica, abbiamo individuato difficoltà comuni sui due gradi scolastici legate alla comprensione del testo dei problemi verbali proposti.

A partire da quest'attività abbiamo predisposto una sperimentazione sulle classi seconde. L'obiettivo principale del lavoro è quello di suggerire una metodologia per individuare precocemente difficoltà su alcuni aspetti del processo di insegnamento/apprendimento della Matematica per intraprendere dei percorsi volti al loro superamento. In altre parole, lo scopo del nostro lavoro è

di mettere in evidenza, rispetto a un particolare contenuto e dimensione matematica, alcune difficoltà che i bambini hanno incontrato e prevedere probabili esiti negativi futuri. Il potere predittivo dell'analisi dei risultati raccolti dalle catene di quesiti, ancorati alla ricerca in didattica della Matematica, permette così di ipotizzare eventuali suggerimenti didattici per intervenire sin da subito ed evitare che le difficoltà osservate in un certo grado scolastico si propaghino o addirittura aumentino nei gradi scolastici successivi.

### 3.1. Selezione dei quesiti

Le catene di quesiti analizzate in questo elaborato sono relative a problemi verbali risolvibili attraverso una modellizzazione aritmetica.

Eseguendo un confronto approfondito tra le prove INVALSI di Matematica di grado 2 (a.s. 2008/2009) e 5 (a.s. 2011/2012) abbiamo identificato delle catene di quesiti relativi alla dimensione Risolvere problemi nell'ambito Numeri. L'insieme di quesiti selezionati è composto da 7 quesiti di grado 2 (rispettivamente n. 2, 4, 8, 9, 14, 16, 22) e 4 quesiti di grado 5 (rispettivamente n. 8, 23, 30, 32). L'analisi statistica e a priori dei quesiti, ci ha permesso di individuare caratteristiche comuni sui due gradi scolastici. In tabella 1 sono elencati i quesiti afferenti alla stessa catena con una breve descrizione degli aspetti che accomuna i quesiti della stessa catena.

*Tab. 1 – Elenco dei quesiti afferenti alla stessa catena con una breve descrizione degli aspetti che li accomuna*

<i>Quesiti di grado 2</i>	<i>Quesiti di grado 5</i>	<i>Caratteristiche comuni individuate</i>
2, 16, 22	23, 30	Problema verbale che richiede di riflettere sulla moltiplicazione come modello per descrivere raggruppamenti di oggetti in contesti reali
8, 9, 14	8	Problema verbale che prevede l'interpretazione di espressioni aritmetiche descritte in forma verbale in un contesto reale
4	32	Problema verbale additivo che richiede di lavorare sulla linea dei numeri in un contesto reale

Di seguito presentiamo un esempio di analisi di una catena composta solo da due quesiti; in particolare il quesito D32 della prova INVALSI di Matematica di quinta primaria (fig. 1) e il quesito D4 della prova INVALSI di Matematica di seconda primaria (fig. 2).

**D32. Antonella parcheggia nel garage di un grattacielo che si trova al quarto piano sotto il livello zero (piano terra). Sale con l'ascensore per 24 piani. A quale piano Antonella uscirà dall'ascensore?**

A.  16

B.  20

C.  24

D.  28

Fig. 1 – Quesito D32 della prova INVALSI di Matematica di grado 5 a.s. 2011/2012

**4. La mamma di Lucia sta facendo la spesa al supermercato. Il tabellone del banco indica che stanno servendo il numero che vedi. La mamma ha preso il biglietto con il numero 39. Quante tra le persone in attesa saranno servite prima di lei?**



A. 38

B. 3

C. 5

Fig. 2 – Quesito D4 della prova INVALSI di Matematica di grado 2 a.s. 2008/2009

I quesiti presentati chiedono allo studente di lavorare sulla linea dei numeri e contare in senso progressivo e regressivo.

Un altro esempio di catena è rappresentato dai quesiti D30 (fig. 3) di grado 5 e D2 (fig. 4) di grado 2. I quesiti chiedono allo studente di operare con i numeri naturali in un contesto moltiplicativo.

**D30. Marta è appassionata di fumetti. La nonna le regala 20 euro e Marta decide di spenderli per acquistare dei giornalini che costano € 2,20 l'uno. Quanti giornalini riesce a comprare al massimo?**

**Risposta:** .....

Fig. 3 – Quesito D30 della prova INVALSI di Matematica di grado 5 a.s. 2011/2012

**2. Giovanni compra delle scatole di matite come questa:**



**Ha in tutto 18 matite. Quante scatole ha comprato?**

- A. 2
- B. 3
- C. 6

Fig. 4 – Quesito D2 della prova INVALSI di Matematica di grado 2 a.s. 2008/2009

### **3.2. Analisi a priori dei quesiti**

Prima di somministrare i quesiti agli studenti abbiamo svolto un'analisi a priori delle domande a partire dai dati raccolti dal Servizio Nazionale di Valutazione relativi al campione nazionale<sup>1</sup>. Lo scopo di quest'analisi è delineare le possibili strategie risolutive che gli studenti potrebbero aver messo in campo e le eventuali difficoltà che potrebbero aver incontrato durante la risoluzione.

La prima catena di quesiti che andremo ad analizzare è quella costituita dai quesiti D32 (fig. 1) e D4 (fig. 2).

Il quesito D32 chiede allo studente di individuare il piano in cui si aprirà l'ascensore conoscendo il piano di partenza e il numero di piani che deve salire. A partire dalle informazioni presentate nel quesito, le possibili strategie risolutive che si potrebbero mettere in campo sono:

- contare in successione cominciando dal piano di partenza (corrispondente a 0 nel conteggio) fino a raggiungere il 24° numero della successione (-1, 0, 1 ... 18, 19, 20);
- eseguire la sottrazione tra il numero di piani che l'ascensore deve salire e il piano di partenza ( $24-4=20$ );
- eseguire la somma tra numeri interi ( $20+(-2)=20$ ).

<sup>1</sup> I dati, i grafici e le immagini dei quesiti che seguiranno sono stati estrapolati dal database delle prove INVALSI [gestinv.it](http://gestinv.it).

Il quesito è a risposta chiusa, tra le opzioni di scelta solo una è corretta (B) scelta dal 43,5 % degli studenti del campione nazionale. Ciascuna delle altre opzioni errate è probabilmente riconducibile a delle difficoltà che potrebbero aver incontrato gli studenti.

Nello specifico, coloro che hanno risposto A (4,2% degli studenti), hanno presumibilmente svolto il ragionamento per cui, dapprima è stata fatta la differenza tra 24 e 4 ( $24-4=20$ ) e successivamente, seppur giunti al risultato corretto, è stata tolta ancora una quantità pari a 4 ( $20-4=16$ ). Coloro che hanno scelto l'opzione C (20,7% degli studenti) probabilmente non hanno tenuto in considerazione che Antonella ha parcheggiato al piano “-4” e non al piano terra. Infine, gli studenti che hanno selezionato l'opzione D (22,8% degli studenti), hanno riconosciuto un problema additivo (sommare al piano di partenza il numero di piani da salire) ma non hanno saputo gestire l'operazione nell'insieme dei numeri interi ( $24+4=28$ ).

Il DP del quesito (fig. 5) indica la correlazione tra la percentuale di scegliere una certa opzione e l'abilità dello studente nella prova. In questo caso, possiamo osservare che la probabilità di scelta delle opzioni errate diminuisce con l'aumentare delle abilità degli studenti e viceversa per la risposta corretta. Ciò non accade per l'opzione D che ha un picco di scelta per studenti di abilità media. Questo fatto ci suggerisce che alcuni studenti di abilità media hanno individuato correttamente il modello additivo per risolvere il quesito ma non sono stati in grado di adattarlo alla situazione con i numeri interi.

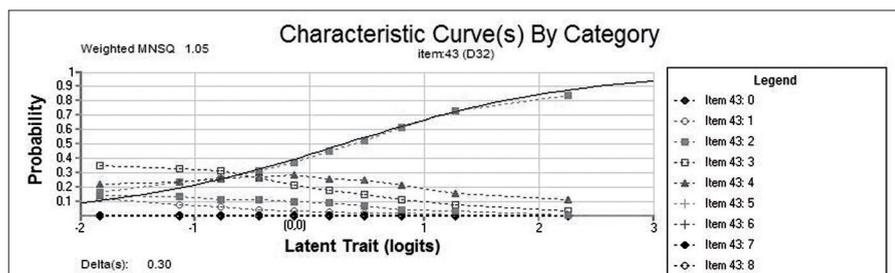


Fig. 5 – Curva caratteristica quesito D32 prova INVALSI di Matematica di grado 5 a.s. 2011/2012

Il quesito D4 presenta un'analogia situazione ma nel contesto dei numeri naturali.

Per risolvere il quesito gli studenti potrebbero aver adottato le seguenti strategie risolutive:

- contare in successione in senso progressivo partendo dal numero 35 (associato a 0) fino ad arrivare a 38 (36, 37, 38);

- contare in successione in senso regressivo partendo dal numero 39 (associato a 0) fino ad arrivare a 36 (38, 37, 36);
- eseguire la sottrazione (38-35=3) (non considerando il 39 perché il proprio numero e quindi non una persona in attesa;
- eseguire la sottrazione (39-36=3) (non considerando il 35 perché è un cliente che già è servito.

Anche questo quesito è a risposta chiusa, tra le opzioni di scelta solo una è corretta (B) scelta dal 39,3% degli studenti del campione nazionale.

Le opzioni di risposta errate sono riconducibili a possibili difficoltà incontrate dagli strumenti in fase risolutiva. Per esempio, gli studenti che hanno scelto l'opzione A (33,5%) potrebbero aver riconosciuto un problema di conteggio (o additivo) ma aver considerato 0 come numero di partenza e non 35. Coloro che hanno scelto l'opzione C (22,3%) è possibile che abbiano svolto il conteggio (35, 36, 37, 38, 39) senza considerare il vincolo della persona servita e che il 39 fosse la mamma. Il DP (fig. 6) segue, anche in questo caso, un andamento classico: crescente per l'opzione corretta e decrescente per le opzioni errate ad eccezione dell'opzione C per cui compare di nuovo una leggera crescita fino a un livello medio di abilità.

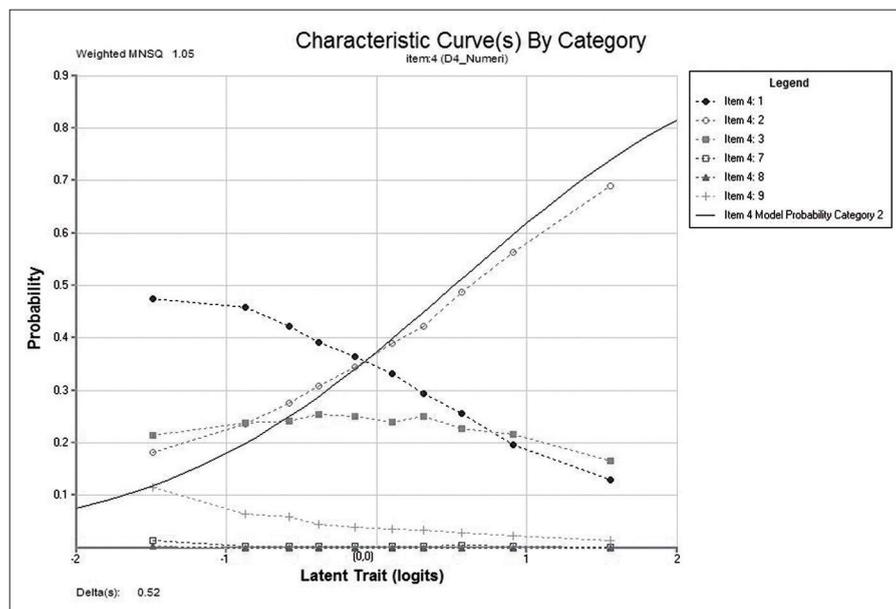


Fig. 6 – Curva caratteristica quesito D4 prova INVALSI di Matematica di grado 2 a.s. 2008/2009

È interessante l'andamento analogo dei distrattori D (fig. 5) e C (fig. 6) nelle due domande rispettivamente di grado 5 e 2. Facendo un'analisi a ritroso possiamo ipotizzare che dietro alla scelta dei due distrattori ci sia una difficoltà analoga, infatti, per quando riguarda il quesito dell'ascensore, lo studente mostra di aver compreso la struttura additiva o di conteggio del quesito ma ha difficoltà a utilizzare le informazioni rispetto al modello matematico. Allo stesso modo, lo studente di grado II che ha scelto l'opzione C mostra di aver individuato la strategia di conteggio adatta per determinare la risposta ma potrebbe non essere stato in grado di adattarla al modello. Possiamo ipotizzare quindi che la difficoltà rilevata nella prova INVALSI di grado 2 possa essere collegata alla difficoltà riscontrata nel futuro grado 5. In questa prospettiva, possiamo supporre che i risultati delle prove INVALSI di seconda primaria possano essere predittivi rispetto ai risultati di quesiti appartenenti alla stessa catena di grado 5.

Il secondo esempio di catena di quesiti è quella dei quesiti D30 (fig. 3) di grado 5 e D2 (fig. 4) di grado 2. In entrambi i casi si tratta di situazioni moltiplicative.

Il quesito D30 presenta una situazione in cui una bambina ha a disposizione una certa quantità di soldi (20 euro) per comprare un prodotto di prezzo dato (giornalini a 2,20 euro). Si chiede di individuare la quantità massima di prodotto acquistabile.

Per determinare la risposta al quesito lo studente può attivare diverse strategie; per esempio:

- determinare il quoziente tra soldi posseduti e prezzo ( $20:2=9,\overline{09}$ ) e considerare solo la parte intera (9 giornalini);
- determinare un multiplo del prezzo dei giornalini che arrotondi per difetto i soldi posseduti ( $2,20 \times 9 = 19,80$ );
- sottrarre successivamente il prezzo dei giornalini ai soldi posseduti e contare quante volte è possibile ( $20 - 2,20 = 17,80$ ;  $17,80 - 2,20 = 15,60$ ; ...  $2,40 - 2,20 = 0,20$ );
- sommare ripetutamente il prezzo dei giornalini fino ad arrotondare per difetto i soldi posseduti e contare il numero di addendi ( $2,20 + 2,20 + 2,20 = 19,80$ ).

In questo caso il quesito è a risposta aperta quindi non possiamo ipotizzare difficoltà in base alla risposta data poiché INVALSI restituisce solo la percentuale di studenti che hanno fornito risposte corrette (35,2%), errate (49,9%) e mancanti o non valide (14,9%).

A priori, però possiamo pensare a possibili difficoltà legate all'approssimazione. Per esempio, indipendentemente dalla strategia scelta, gli studenti potrebbero aver risposto 10 giornalini arrotondando per difetto il risultato ottenuto. Oppure, gli studenti che hanno risposto 10 potrebbero aver scelto

di arrotondare il prezzo dei giornalini a 2 euro trascurando poi questo arrotondamento nel risultato finale. In aggiunta, il fatto che gli studenti fossero obbligati a operare con i numeri razionali potrebbe averli portati a commettere errori algoritmici nella gestione dei numeri decimali.

In questo caso il DP (fig. 7) non fornisce informazioni particolarmente rilevanti poiché l'andamento delle curve è segue l'andamento statistico auspicato.

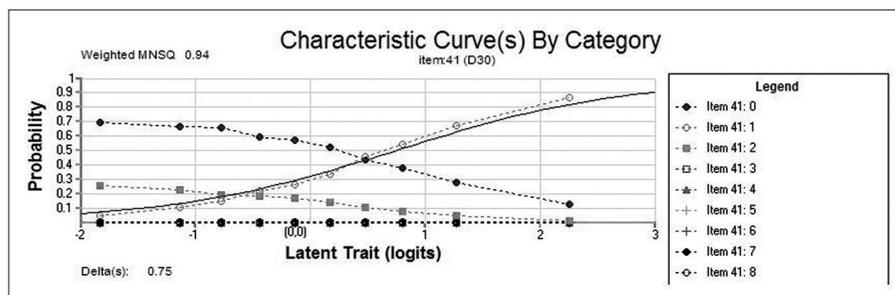


Fig. 7 – Curva caratteristica quesito D30 prova INVALSI di Matematica di grado 5 a.s. 2011/2012

Anche la domanda D2 fa riferimento a un problema moltiplicativo. Infatti, lo studente deve individuare il numero di scatole di matite necessarie a contenere un certo numero di matite dato (18) e conoscendo il numero di matite per ogni scatola (6).

Le strategie risolutive che potrebbero essere state adottate dagli studenti potrebbero essere:

- aggiungere successivamente il numero di matite per scatola fino a ottenere il numero di matite totali e contare il numero di addendi ( $6+6+6=18$ );
- sottrarre ripetutamente il numero di matite per ogni scatola al numero totale di matite e contare quante volte si è sottratto ( $18-6-6-6=0$ );
- dividere il numero totale di matite per il numero di matite per scatola ( $18:6=3$ );
- determinare il multiplo del numero di matite per scatola equivalente al numero di matite totali ( $6 \times 3=18$ ).

Questa volta il quesito è a risposta multipla quindi conosciamo le risposte degli studenti e a partire da queste possiamo ipotizzare le difficoltà che potrebbero aver incontrato. La risposta corretta era l'opzione B che ha raccolto il 52,9% di scelta.

L'opzione A (19,7% si scelte) potrebbe essere ricollegata a un errore algoritmico indipendentemente dalla strategia utilizzata oppure a un'errata approssimazione dei dati numerici. L'opzione C (23,5% di scelte), invece,

potrebbe essere dovuto alla confusione tra il numero di matite per scatola (6) e il numero di scatole (3).

Il DP (fig. 8) ha un andamento decrescente per le opzioni errate e crescente per la corretta. C'è da notare che nonostante l'andamento decrescente, le due curve partono da valori iniziali molto alti, ciò significa che gli studenti con basso livello di abilità nella prova hanno avuto altissima probabilità di scegliere un'opzione errata.

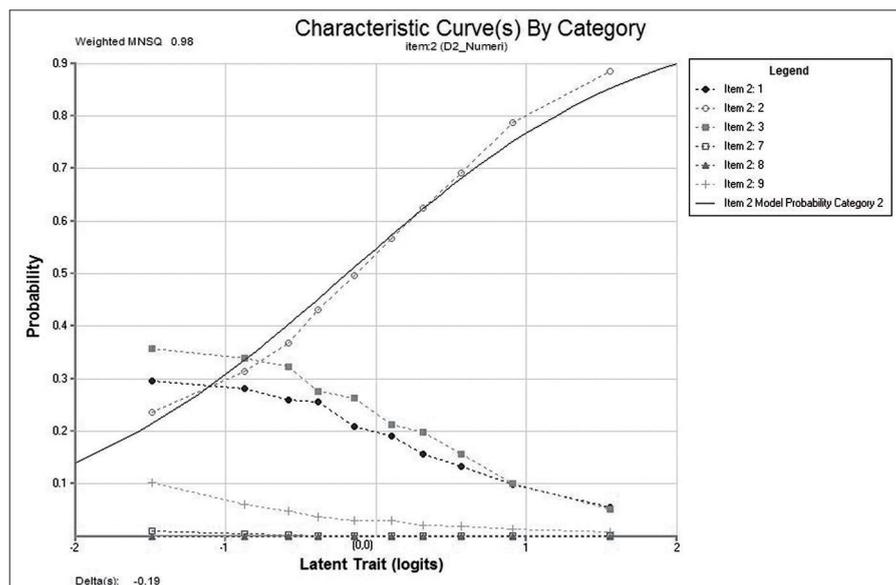


Fig. 8 – Curva caratteristica quesito D2 prova INVALSI di Matematica di grado 2 a.s. 2008/2009

Le difficoltà incontrate dagli studenti in questo quesito potrebbero essere predittive rispetto alle difficoltà che hanno successivamente incontrato nel quesito di grado 5. In effetti, entrambi i quesiti chiedevano di sviluppare le stesse strategie risolutive con l'unica differenza nell'insieme dei numeri da considerare: nel grado 2 interi, mentre nel grado 5 razionali.

#### 4. La sperimentazione

La premessa metodologica per lo svolgimento del lavoro di ricerca in questione è stata l'omogeneità del campione riguardante: il numero di alunni coinvolti per ogni classe, il rapporto tra il numero di alunni e quello delle

alunne, la loro età anagrafica e, soprattutto, il grado di competenza matematica posseduta.

Il campione di studenti coinvolto nella sperimentazione era costituito da due classi seconde della scuola primaria dell'istituto comprensivo "Colozza" di Campobasso. La classe seconda A è stata la classe sperimentale mentre la seconda B la classe di controllo. La classe sperimentale era formata da 22 studenti (10 maschi e 12 femmine), di cui 21 di 7 anni e una bambina di 6 anni, la classe di controllo era costituita anch'essa da 22 studenti (13 maschi e 9 femmine), tutti di 7 anni.

A entrambe le classi è stato inizialmente somministrato un pre-test composto dai sette quesiti selezionati presi direttamente dalla prova INVALSI di Matematica di seconda primaria dell'anno scolastico 2008/2009. Per arricchire la raccolta dei dati abbiamo scelto di lasciare tra un quesito e l'altro uno spazio bianco in cui gli studenti dovevano esplicitare una motivazione della risposta data. Gli studenti potevano scegliere liberamente il modo in cui farlo (per es. tramite passaggi matematici scritti, verbalizzazione dei procedimenti eseguiti, disegni, schemi o altro).

Per approfondire l'analisi delle risposte fornite al pre-test e validare le nostre ipotesi abbiamo dedicato la prima parte dell'intervento didattico a una discussione guidata sulle risposte fornite ai quesiti del pre-test con un'alta percentuale di risposte errate. Tale discussione è stata proposta a coppie di studenti ponendo a ciascuna diade alcune *domande-guida*:

- 1) Cosa chiede la domanda?
- 2) Qual è la risposta corretta?
- 3) Come hai fatto a rispondere?
- 4) Che difficoltà hai incontrato?
- 5) Se doveste riscrivere il testo del quesito in modo più semplice e di facile risoluzione come fareste?

Le coppie di studenti erano state individuate dall'insegnante in modo da permettere un lavoro cooperativo.

Successivamente è stato svolto un secondo intervento didattico ovvero un'attività laboratoriale, anch'essa in coppia, con lo scopo di risolvere nuovi quesiti di Matematica creati appositamente ed equivalenti<sup>2</sup> a quelli del pre-test.

Al termine della sperimentazione è stato somministrato a entrambe le classi campione un post-test, composto da nuovi quesiti, anch'essi creati di proposito ed equivalenti a quelli del pre-test, allo scopo di verificare se gli

<sup>2</sup> Con il termine *equivalenti* ci riferiamo a quesiti afferenti allo stesso ambito (numeri) e alla stessa dimensione (risolvere problemi). Si tratta di quesiti legati ai precedenti per: struttura testuale, contenuti matematici e risolvibili attraverso analoghe strategie risolutive.

interventi didattici avevano prodotto alcuni cambiamenti positivi nella classe sperimentale, rispetto a quella di controllo.

## 5. I risultati

A seguito della somministrazione del pre-test, svolto da entrambe le classi campione, ne sono stati raccolti, analizzati e messi a confronto i dati. Nei due grafici presentati in figura 9 sono riportate le percentuali di risposte corrette degli studenti delle due classi.

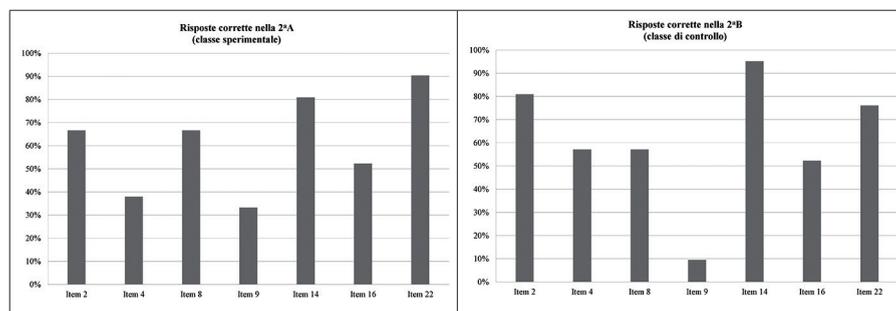


Fig. 9a – Risultati ottenuti nel pre-test dalla classe sperimentale

Fig. 9b – Risultati ottenuti nel pre-test dalla classe di controllo

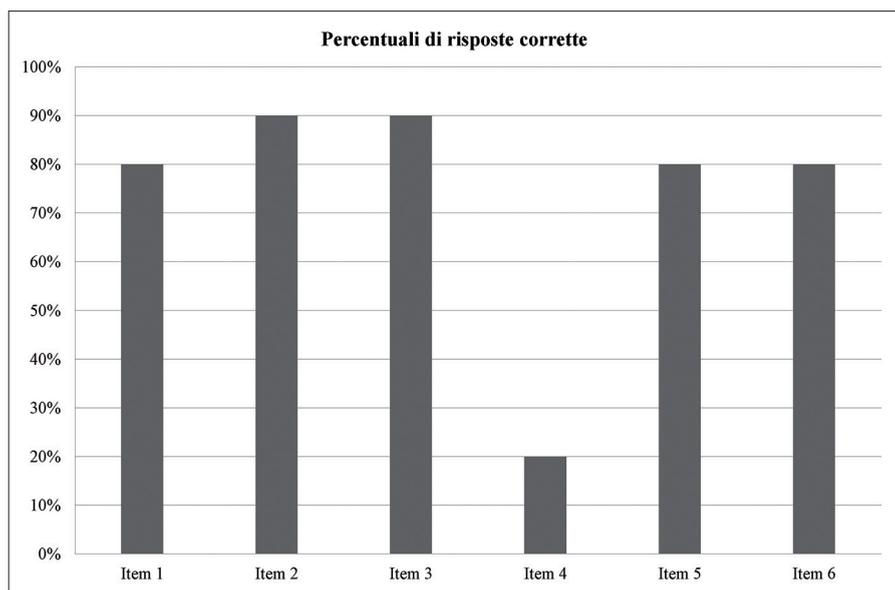
Facendo un confronto tra le prestazioni al pre-test della classe sperimentale e quelle della classe di controllo i risultati sono pressoché simili (tranne per l'item n. 9), a conferma dell'omogeneità di partenza dei livelli di conoscenze e competenze matematiche dei due campioni.

Ciò che è stato possibile dedurre è che le performance degli studenti della classe sperimentale e quelli della classe di controllo sono mediamente positive e pressoché simili tra loro e ai risultati raccolti dal Servizio Nazionale di Valutazione.

Successivamente è stato svolto il primo intervento didattico ossia la discussione in aula sui singoli quesiti del pre-test con gli studenti della classe sperimentale, suddivisi in coppie, attraverso le domande-guida. Il lavoro di gruppo prima e la discussione condivisa con la classe poi, ha permesso di far emergere le difficoltà e quindi confermare e consolidare le ipotesi a priori che erano state formulate. È stato possibile dedurre infatti in quali punti della prova gli studenti hanno avuto maggiori difficoltà e dove invece la risoluzione dei quesiti si è dimostrata loro più semplice. In aggiunta, il lavoro di rielaborazione del testo dei quesiti (domanda 5) ha permesso di

attivare una prima attività focalizzata sulla comprensione del testo dei problemi verbali.

Sulla base della discussione condotta è stato pensato e predisposto il secondo intervento didattico ossia l'attività laboratoriale, sempre in coppie. Anche in questo secondo intervento la scelta di lavorare in coppia e in gruppo è nata dal voler promuovere il confronto e lo scambio reciproco di idee su temi matematici di vario genere nella convinzione che, in particolare quando ci si appropria a discipline scientifiche, è proprio dal confronto che nascono nuove idee e visioni alternative. Durante tutta l'attività i bambini sono rimasti concentrati, intenti nella risoluzione dei quesiti e vi è stata una continua interazione tra di loro tipica di un laboratorio didattico. Durante lo svolgimento dei quesiti, in particolare tra uno e l'altro, veniva lasciato ai bambini il tempo necessario per la risoluzione e, prima di procedere alla successiva somministrazione, si aspettava che tutti avessero finito. Proprio per questo, in ogni pagina del fascicolo sono stati inseriti dei disegni in bianco e nero che coloro che avevano terminato potevano colorare, evitando così di annoiarsi o disturbare in attesa che gli altri concludessero il lavoro. Durante tutta la durata dell'attività, ci si è limitati a osservare la situazione didattica dando soltanto pochi e semplici orientamenti su come approcciarsi alla prova, senza però dare alcuna indicazione procedurale né di calcolo.



*Fig. 10 – Percentuali di risposte corrette dei quesiti presentati nell'attività laboratoriale svolta dal campione sperimentale*

Il grafico presentato in figura 10 rappresenta i risultati dell'attività laboratoriale, i cui valori fanno riferimento alle percentuali di risposte corrette fornite. I quesiti sono presentati nell'ordine rispetto agli item del pre-test per cui sono equivalenti.

I risultati sono stati molto positivi, ad eccezione di un unico quesito che ha riscosso un basso numero di risposte corrette.

Infine, si è tornati a lavorare su entrambe le classi del campione somministrando il post-test i cui risultati hanno mostrato come le prestazioni degli studenti del campione sperimentale, a seguito dei due interventi didattici, sono migliorate rispetto a quelle del pre-test (fig. 11).

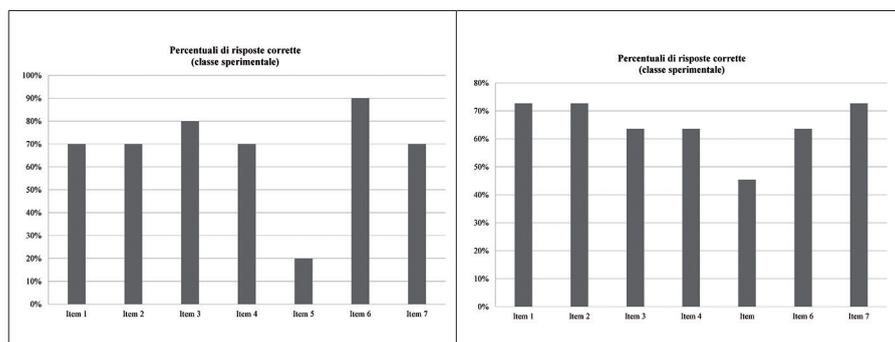


Fig. 11a – Risultati ottenuti nel post-test dalla classe sperimentale

Fig. 11b – Risultati ottenuti nel post-test dalla classe di controllo

I dati mostrano come vi sia stato un generale miglioramento delle performance dei bambini del campione sperimentale, in particolare per i quesiti n. 4, n. 8 e n. 9 del pre-test equivalenti ai quesiti n. 2, n. 3 e n. 4 del post-test. Osservando i risultati relativi agli item n. 2 e n. 14 del pre-test possiamo affermare che vi è stato un miglioramento, anche se lieve. Interessante è soffermarsi sulle percentuali relative ai quesiti n. 16 e n. 22 del pre-test in quanto, diversamente dai risultati dei precedenti quesiti della medesima prova, mostrano un calo delle prestazioni. Nel quesito n. 16, equivalente al n. 7 del post-test, si può pensare che alcuni bambini possano aver riscontrato difficoltà nel calcolo o nell'individuazione della corretta operazione da svolgere. Soffermandosi invece ad analizzare i dati relativi al quesito n. 16 del pre-test, equivalente al n. 5 del post-test, possiamo rilevare un calo nelle prestazioni.

Per quanto riguarda la classe di controllo, rispetto al pre-test, gli studenti hanno comunque mostrato un miglioramento, seppur lieve, delle performance, pur in assenza di interventi didattici mirati: si può pensare infatti che ciò sia stato dovuto al consolidamento di alcune conoscenze e competenze

disciplinari da parte dei bambini a seguito delle ordinarie lezioni di Matematica fatte dalla loro maestra nell'intervallo di tempo intercorrente tra le due somministrazioni.

In ultima analisi, riteniamo interessante discutere il caso del quesito n. 5 del post-test. Analizzando il quesito è stato notato, a una rilettura più attenta, che sia nel testo che nella domanda erano stati utilizzati, in un modo forse semanticamente fraintendibile, i termini “librerie” e “libreria” per cui i bambini avevano probabilmente inteso per librerie i quattro scaffali contenenti i libri, e per libreria il singolo scaffale e non l'insieme dei quattro. Questo fraintendimento ha portato gli studenti a scegliere delle strategie risolutive errate al contrario degli studenti della classe di controllo. Questo risultato è in realtà molto positivo poiché gli studenti della classe sperimentale hanno mostrato di possedere un'accurata capacità di lettura del testo del problema verbale. Al contrario, gli studenti della classe di controllo hanno mostrato un comportamento stereotipato nell'approccio al problema non preoccupandosi delle ambiguità linguistiche del testo.

## 6. Conclusioni

Il motivo conduttore dell'intero lavoro è l'analisi verticale delle catene di quesiti delle prove INVALSI di Matematica della dimensione *risolvere problemi*. Le catene di quesiti sono un insieme di domande appartenenti a prove INVALSI di Matematica di anni differenti e diversi gradi scolastici tutti relativi a un certo contenuto matematico e riferite a una stessa dimensione. Le catene di quesiti analizzate in questo elaborato sono relative a problemi verbali risolubili attraverso una modellizzazione aritmetica. Tale analisi è risultata utile per porre in evidenza le difficoltà che i bambini hanno incontrato e prevedere probabili esiti negativi futuri. Il potere predittivo delle catene di quesiti permette così di ipotizzare eventuali suggerimenti didattici per intervenire sin da subito ed evitare che le difficoltà osservate in un certo grado scolastico si propaghino o addirittura aumentino nei gradi scolastici successivi. Nel nostro caso specifico, sono state comparate a ritroso la prova INVALSI di quinta primaria dell'a.s. 2011/2012 con quella di seconda primaria dell'a.s. 2008/2009, somministrate alla stessa coorte di studenti. La comparazione ha permesso di far notare che alcune difficoltà riscontrate nel grado V, già emergono in alcuni quesiti di grado II.

Sulla base di tali evidenze è stato impostato l'intero lavoro sperimentale che ha coinvolto due classi seconde della scuola primaria “Colozza” di Campobasso. A entrambe le classi è stato inizialmente somministrato un

pre-test, costruito con alcuni quesiti presi direttamente dalla prova INVALSI di seconda, per valutare le competenze e conoscenze di partenza. In seguito, ci si è concentrati solo sul campione sperimentale, facendo una discussione guidata con gli studenti sugli esiti della prova per indagare se le difficoltà riscontrate fossero in effetti concordi con le ipotesi sperimentali di partenza. Successivamente è stata svolta un'attività laboratoriale in coppia per risolvere nuovi quesiti di Matematica equivalenti a quelli del pre-test. Al termine della sperimentazione è stato somministrato a entrambe le classi campione un post-test, con nuovi quesiti equivalenti a quelli dell'attività laboratoriale, allo scopo di verificare se gli interventi didattici avevano prodotto alcuni cambiamenti positivi nella classe sperimentale, rispetto a quella di controllo.

A conferma dell'ipotesi di partenza, vi è stato un discreto miglioramento nel campione sperimentale a seguito probabilmente degli interventi didattici fatti nel periodo intercorso tra la somministrazione del pre-test e del post-test. Tale miglioramento non è stato rilevato se non in forma lieve nelle performance degli studenti del campione di controllo che non avevano fatto alcun tipo di intervento didattico integrativo. Ipotizziamo che il piccolo miglioramento sia dovuto all'ordinaria attività didattica svolta nel periodo intercorrente tra le due somministrazioni. In generale, riflettendo sulle difficoltà che gli studenti hanno mostrato e di cui si è parlato in vari momenti, si può ipotizzare che esse siano state dovute soprattutto alla mancata o errata interpretazione del testo del problema, con conseguente compromissione dell'intero processo di risoluzione.

La sperimentazione e in particolare la discussione ha in effetti messo in risalto la coerenza tra le ipotesi costruite a priori e gli effettivi ostacoli che gli studenti hanno incontrato nella prova. Questo aspetto ha avvalorato l'ipotesi di partenza per cui le difficoltà incontrate dagli studenti nel grado V potessero essere ricondotte a difficoltà precedentemente emerse nel grado 2. Il fatto che il percorso sperimentale abbia avuto un effetto positivo sugli studenti della classe seconda, ci permette di ipotizzare che una precoce individuazione delle difficoltà e un intervento mirato potrebbero aiutare a superare futuri ostacoli nella comprensione del testo dei problemi verbali. Tale ipotesi andrebbe consolidata proponendo una successiva sperimentazione alla stessa coorte di studenti quando frequenterà la classe quinta primaria.

Nonostante questo studio parta da una base prettamente quantitativa, le interviste e il successivo intervento didattico hanno una prospettiva qualitativa e quindi coinvolgono una coorte molto ristretta di studenti. Per ovviare a questo limite di ricerca, si può pensare di svolgere più sperimentazioni analoghe su un campione numericamente significativo per convalidare o meno quanto emerso in questa sede.

Una possibile prospettiva futuro per questo studio potrebbe essere quella di estendere una simile ricerca anche alle altre dimensioni previste nelle prove INVALSI di Matematica, come “Conoscere” o “Argomentare” per osservare se anche in questi nuovi contesti le prove di grado 2 possono essere uno strumento per evidenziare delle difficoltà precocemente e intervenire di conseguenza. In altro modo, si potrebbe procedere considerando la stessa catena di quesiti estendendola a più gradi scolastici, organizzando, anche in questo caso, interventi didattici mirati. Questo punto di vista ci appare particolarmente interessante soprattutto nell’ottica di verificare se certe difficoltà continuano a mantenersi, si evolvono o si superano nel tempo.

## Riferimenti bibliografici

- Ball D., Bass H. (2003), “Making mathematics reasonable in school”, in J. Kilpatrick, W. G. Martin, D. Schifter, *A research companion to Principles and standards for mathematics*, NCTM, Reston, pp. 27-44.
- Bolondi G., Branchetti L., Ferretti F., Lemmo A., Maffia A., Martignone F., Santi G. (2016), “Un approccio longitudinale per l’analisi delle prove INVALSI di matematica: cosa ci può dire sugli studenti in difficoltà?”, in P. Falzetti, *Concorso di idee per la ricerca*, FrancoAngeli, Milano, pp. 81-102.
- D’Amore B. (2000), “Lingua, matematica e didattica”, *La matematica e la sua didattica*, 1, pp. 28-47.
- Daroczy G., Wolska M., Meurers W.D., Nuerk H. C. (2015), “Word problems: A review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty”, *Frontiers in Psychology*, 6, p. 348.
- De Corte E., Verschaffel L. (1985), “Beginning first graders’ initial representation of arithmetic word problems”, *The Journal of Mathematical Behavior*, 4, pp. 3-21.
- Duval R. (1991), “Interaction des différents niveaux de représentation dans la compréhension de textes”, *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, 1, pp. 136-193.
- English L.D., Watters J.J. (2004), “Mathematical Modeling in the Early School Years”, *Mathematics Education Research Journal*, 16, 3, pp. 59-80.
- Gerofsky S. (1996), “A linguistic and narrative view of word problems in mathematics education”, *For the Learning of Mathematics*, 16, 2, pp. 36-45.
- Jupri A., Drijvers P.H.M. (2016), “Student difficulties in mathematizing word problems in algebra”, *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 12, 9, pp. 2481-2502.
- Kilpatrick J., Swafford J., Findell B. (2001), *Adding it up: helping children learn mathematics*, National Academy Press, Washington.
- Kintsch W., Greeno J.G. (1985), “Understanding and solving word arithmetic problems”, *Psychological Review*, 92, 1, p. 109.

- Mayer R. (1982), “The psychology of mathematical problem solving”, in F.L. Lester, J. Garofalo (eds.), *Mathematical problem solving. Issues in research*, The Franklin Institute Press, Philadelphia, pp. 1-13.
- MIUR (2012), *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell’infanzia e del primo ciclo d’istruzione*, testo disponibile al sito: <http://www.indicazioninazionali.it/2018/08/26/indicazioni-2012/>, data di consultazione 3/2/2021.
- Nesher P. (1982), “Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems”, in T.P. Carpenter, J.M. Moser, T.A. Romberg, *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah (NJ), pp. 25-38.
- Rasch G. (1960), *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests*, Danish Institute for Educational Research, Copenhagen.
- Schoenfeld A.H. (1985), *Mathematical problem solving*, Academic Press, New York.
- Verschaffel L., Greer B., De Corte E. (2000), *Making sense of word problems*, Swets & Zeitlinger, Lisse (NL).
- Vilenius-Tuohimaa P.M., Aunola K., Nurmi J. (2008), “The association between mathematical word problems and reading comprehension”, *Educational Psychology*, 28, 4, pp. 409-426.
- Wijaya A., Van den Heuvel-Panhuizen M., Doorman M., Robitzsch A. (2014), “Difficulties in solving context-based PISA mathematics tasks: An analysis of students’ errors”, *The Mathematics Enthusiast*, 11, 3, pp. 555-584.
- Zan R. (2016), *I problemi di matematica: difficoltà di comprensione e formulazione del testo*, Carrocci, Roma.