

## **Giocando con la torre di Hanoi: dalla ricerca di regolarità al principio di induzione**

**Paolo Da Pelo<sup>1</sup>, Antonella Azzone<sup>2</sup> e Eleonora Faggiano<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>I.C. "Caporizzi-Lucarelli", Acquaviva delle Fonti (BA); <sup>2</sup>L.S. "E. Amaldi", Bitetto (BA); <sup>3</sup>Università di Bari Aldo Moro

### **1. Introduzione**

Il gioco della torre di Hanoi, inventato dal matematico francese Edouard Lucas, ha conquistato generazioni di bambini. Esso consiste nello spostare una torre di dischi concentrici da una collocazione all'altra, osservando delle regole prestabilite: si può muovere un solo disco alla volta; un disco più grande non può essere collocato su un disco più piccolo. Nel muovere dischi e piramidi via via più grandi da una base all'altra si scoprono diverse regolarità che rendono il gioco aperto a numerose finalità didattiche di tipo e complessità diverse. D'altra parte, la possibilità di elaborare congetture semplici, di individuare strategie ricorsive, di applicare facilmente il principio di induzione a partire dalle strategie individuate, di trovare connessioni matematiche via via più fini ed elaborate, rende l'attività didattica fruibile dalla scuola secondaria sia di 1° che di 2° grado. L'attività proposta è stata svolta da alunni del primo anno di Liceo Scientifico, nell'ambito del progetto Liceo Matematico.

### **2. L'attività in classe**

Il percorso si apre con il racconto della leggenda legata alla torre di Hanoi, tratta dalla narrazione stessa dell'inventore del gioco (Gardner, 2008): ci sono dei monaci in Asia che stanno terminando il gioco con una torre da 64 dischi, non appena la torre sarà terminata l'universo cesserà di esistere, quando sarà allora la fine del mondo? La sfida posta ai ragazzi offre la motivazione/curiosità di approcciarsi ad un gioco che fin da subito rivela di possedere strategie nascoste su cui indagare. Nella fase iniziale, dopo aver suddiviso i ragazzi in coppie, l'insegnante illustra in maniera molto schematica obiettivo e regole del gioco e consegna agli alunni un foglio di lavoro con le fasi dell'attività riportate ed una tabella da compilare (Figura 1). Viene illustrato ai ragazzi il doppio fine di svelare le strategie che permettono di completare la torre e, nel contempo, utilizzare tali strategie per determinare il numero minimo di mosse  $M_n$  all'incremento volta per volta del numero  $n$  di dischi. Lo sviluppo del gioco all'aumentare della complessità, i processi reiterativi insiti, sottendono rimandi ai passi caratteristici del principio di induzione, fra i quali l'abbandono di risoluzione per tentativi e la ricerca di un metodo generale. Dopo aver discusso i risultati per i casi semplici  $n = 0, 1, 2$ , si richiede per  $n = 3$  di riprovare più volte il gioco, ricercando una strategia da poter riutilizzare nel passaggio ad  $n = 4$ . Tra la fase 2 e la fase 3, mediante discussione guidata, si perviene alla necessità di un'osservazione sempre più fine e analitica, al fine di determinare l'"algoritmo" del gioco: «dove va collocato il primo disco?», «quali sono le mosse "chiave"?». Gli alunni sperimentano strategie e congetture che testano sui livelli più bassi e che validano sul livello  $n = 5$  (fasi 4-5).

Alcuni gruppi ricercano una relazione ricorsiva fra il numero di mosse in passi successivi all'interno della tabella:

1. Inizia con un disco, poi passa a due dischi e dunque a 3, cercando il numero minimo di mosse.
2. Prova più volte, individuando la strategia che garantisce il numero minimo di mosse.
3. Ora prova con 4 dischi. C'è qualche strategia che hai utilizzato nel passo precedente che puoi riutilizzare per risolverlo nel numero minimo di mosse?
4. Prova più volte e osserva bene le mosse che fai. Esiste una strategia ("Pattern") che potrebbe risultare utile per risolvere il gioco su 5 dischi?
5. Se  $M_{n-1}$  è il numero di mosse del passo precedente, qual è il numero di mosse  $M_n$ ?
6. Osservando la tabella, quale congettura possiamo fare sul numero di mosse per  $n$  dischi?



| N° di dischi | Numero minimo di mosse |
|--------------|------------------------|
| 1            | ...                    |
| 2            | ...                    |
| 3            | ...                    |
| 4            | ...                    |

*Figura 1: Fasi dell'attività*

«Sommo il numero delle mosse precedenti più una mossa, e questo si ripete per tutte le torri».

Altri gruppi determinano la strategia ricorsiva nell'esecuzione del gioco:

«Scomponiamo la torre da 4 ricostruendo la torre da 3 in un'altra collocazione (7 mosse); spostato l'ultimo disco (1 mossa), smonto nuovamente la torre da 3 e la ricostruisco (7 mosse)». Gli studenti identificano facilmente l'espressione ricorsiva del numero di mosse  $M_n = 2 M_{n-1} + 1$ , attribuendo senso ad ogni termine della relazione. La discussione sulla difficoltà di determinare il numero minimo di mosse per  $n = 64$  utilizzando l'espressione ricorsiva, fornisce la motivazione didattica per ricercare la forma chiusa di  $M_n$  in funzione di  $n$ . La discussione guidata basata sull'osservazione della tabella conduce rapidamente a formulare l'espressione analitica  $M_n = 2^n - 1$ . «Qual è l'espressione per  $n + 1$ ? Se la proposizione è vera per  $n$  cosa vuol dire dimostrarla per  $n + 1$ ?». L'analogia tra il processo mentale che i ragazzi compiono nel passare da un livello a quello successivo, e il passo induttivo ne giustifica la sua necessità per dimostrare l'asserto per qualunque  $n$ . L'utilizzo dell'espressione ricorsiva congiunge il semplice calcolo numerico al calcolo algebrico.

### 3. Conclusioni

Grazie alla facilità con cui il gioco è modificabile, variandone ad esempio le regole, la torre di Hanoi si presta a diverse generalizzazioni e collegamenti, ad esempio con la teoria dei grafi, le geometrie frattali, i codici binari, il triangolo di Pascal.

### Bibliografia

Gsrdr, M. (2008). Hexaflexagons, Probability Paradoxes, and the Tower of Hanoi. Cambridge University Press. (Lavoro originale del 1959)

**Parole chiave:** torre di Hanoi; principio d'induzione; ricorsività; giochi matematici; scuola secondaria